4 Křivka, kterou vytvoří prověšený provaz, se nazývá *řetězovka*. Stejný tvar má i elektrické vedení mezi dvěma stožáry nebo řetěz mezi dvěma sloupky. Průřez kopulí katedrály svatého Pavla v Londýně je obrácená řetězovka.

Rovnice řetězovky je

$$y = A \cosh \frac{x}{A + B} + C,$$

kde cosh značí hyperbolický kosinus a A, B a C jsou konstanty určené délkou řetězu a jeho prověšením.

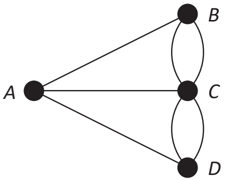
Řešit naši úlohu pomocí této rovnice by ovšem znamenalo brát kanon na vrabce. Prádelní šňůra je dlouhá deset metrů a má být prověšená o pět metrů, což je přesně polovina její délky. To znamená, že zdvojená visí kolmo dolů a vzdálenost obou domů je nulová.

Zdroj: Murray S. Klamkin, Mathematics Magazine 28, leden–únor 1955, s. 172.

5 Pravděpodobnost je nulová. Když totiž třicet jedna mužů tančí se svými manželkami, zbývá pro dvaatřicátého jako taneční partnerka už jen jeho žena, a proto tančí s vlastní ženou všech třicet dva mužů.

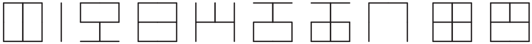
Zdroj: Charles W. Trigg, Mathematics Magazine 23, březen–duben 1950, s. 210, 211.

16 Když si místo ostrova a ostatních tří částí města představíme body (vrcholy) a pospojujeme je čarami podle toho, kolik mostů mezi nimi vede, dostaneme úkol podobný kreslení domečku z předchozí úlohy. Protože v takto získaném diagramu vede do každého ze čtyř vrcholů lichý počet čar, není možné obrázek nakreslit jedním tahem. To znamená, že zamýšlená procházka není uskutečnitelná (a to i kdybychom netrvali na tom, že skončíme ve výchozím bodě). Euler svým řešením položil základy významné matematické disciplíny, která se nazývá *teorie grafů*.



Zdroj: Leonhard Euler, Solutio problematis ad Geometriam situs pertinentis. Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae 1736, sv. VIII, Leningrad 1741, s. 128–140.

Pěkná variace na tutéž úlohu se ptá, podle jakého pravidla byla vytvořena následující řada:



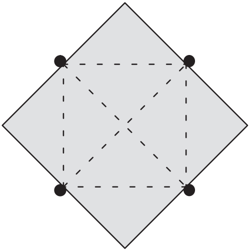
Jedná se o tutéž posloupnost jako prve, jen místo běžných číslic používáme digitální.

Zdroj: Neil James Alexander Sloane, A Handbook of Integer Sequences, New York 1973, s. 31. – Variace: Caponnetto a Ivan Paasche, Praxis der Mathematik 21, 1979, s. 141, 144.

21 Číslo následující po 70 351 002 je 70 351 003. Co jste čekali?

Zdroj: Anonym, HÖRZU, sešit 32, 2. srpna 1985, s. 3.

22 Dvojnásobný čtvercový bazén se mezi stromy vejde, jen je potřeba postavit jej pootočený o 45°. Délka hrany nového bazénu pak bude $5\sqrt{2} \doteq 7{,}071$ metrů. Když si původní čtverec rozdělíme úhlopříčkami na čtvrtiny, je jasně vidět, že se plocha skutečně zdvojnásobila.



Zdroj: Anonym, The Sociable, New York 1858, s. 298, 316. – Knihu pravděpodobně napsali George Arnold nebo Wiljalba Frikell, případně oba společně.

23 Západ a východ nejsou přesné odpovědi! Na obrázku vidíme rovnoběžku, která prochází středem pyramidy; pyramida je výrazně zvětšená, abychom si jevy vzniklé kulatostí Země dokázali lépe představit.

První členy na obou stranách se ovšem rovnají, protože jde o obvod původní kružnice. Můžeme je proto vyrušit a z výsledného vztahu $\Delta o = 2\pi\Delta r$ vyjádřit Δr, čímž zjistíme vzdálenost prodlouženého provázku od rovníku.

$$\Delta r = \frac{\Delta o}{2\pi} = \frac{1\ \mathrm{m}}{2\pi} \doteq 15{,}9\ \mathrm{cm}$$

Vidíme, že se do vzniklé skoro šestnácticentimetrové mezery mezi zeměkoulí a provázkem pohodlně vejde několik tlustých knih.

Zdroj: Henry Ernest Dudeney, Strand Magazine 38, prosinec 1909, s. 673–674.

32 Odpověděli jste okamžitě „zhruba 15,9 centimetrů“? Správně! Navzdory tomu nám „zdravý selský rozum“ napovídá, že prodloužení krátkého provázku o metr bude hrát větší roli než prodloužení provázku mnohakilometrového, a proto bychom v případě pomeranče očekávali větší vzdálenost (nebo spíš v případě zeměkoule vzdálenost menší). Rovnice, kterou jsme v předešlém řešení odvodili, ale vůbec neobsahuje poloměr použité koule, takže mezera vyjde naprosto stejná, ať už je provázek obtočený okolo Slunce, nebo okolo jednoho jediného atomu.

Zdroj: Henry Ernest Dudeney, Strand Magazine 38, prosinec 1909, s. 673–674.

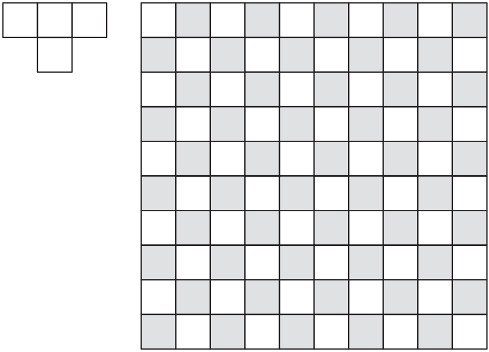
33 Hledaným součtem vektorů je opět nějaký vektor a ten ukazuje určitým směrem. Když mnohoúhelníkem otáčíme, otáčí se samozřejmě i tento výsledný vektor. Pokud ale mnohoúhelník otočíme tak, aby padl přesně na sebe sama (každý vrchol tedy padne do některého jiného vrcholu), musí být hledaný součet vektorů stejný jako prve. Žádný vektor nenulové délky ale nemůže ukazovat do dvou směrů zároveň; proto je hledaný součet vektorů nulový. (Stejná odpověď samozřejmě platí i pro mnohoúhelníky se sudým počtem vrcholů; tam ovšem existuje i jednodušší zdůvodnění, protože se dvojice protilehlých vektorů odečtou.)

Zdroj: Richard Couchman, Mathematics Magazine 26, květen–červen 1953, s. 287, 288.

34 Součástí zadání je i informace, že nezáleží na velikosti vnitřního kruhu! Pokud z ní vycházíme, je jasné, že můžeme hledanou hodnotu určit z kteréhokoli čísla, tedy 5/12 ≐ 0,417. Výsledky předchozích devatenácti kol samozřejmě nemají žádný vliv.

Zdroj: Martin Gardner, Scientific American 208, duben 1963, s. 156, 160.

44 Představme si, že je tato šachovnice tvořená černými a bílými políčky, která tvoří klasický šachovnicový vzor.

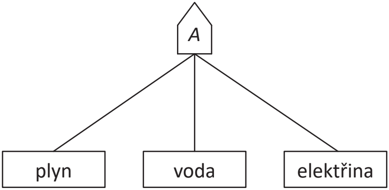


Kdykoli na takovouto šachovnici položíme T-tetromino, pokryjeme tím tři políčka jedné a jen jedno políčko druhé barvy. Po položení jednoho tetromina je proto od každé barvy pokrytý lichý počet políček. Když položíme další tetromino tak, aby se s předchozím nepřekrývalo, budou obě tetromina dohromady pokrývat sudý počet bílých a sudý počet černých políček. Po položení třetího tetromina budou zase oba počty liché, po položení čtvrtého sudé a tak dále. Pětadvacet je liché číslo, takže kdyby se nám podařilo položit všech pětadvacet tetromin na šachovnici tak, aby se nepřekrývala, víme, že tato tetromina budou dohromady pokrývat lichý počet bílých a lichý počet černých políček. Šachovnice ovšem obsahuje od každé barvy padesát políček, což je sudé číslo, takže takové pokrytí není možné.

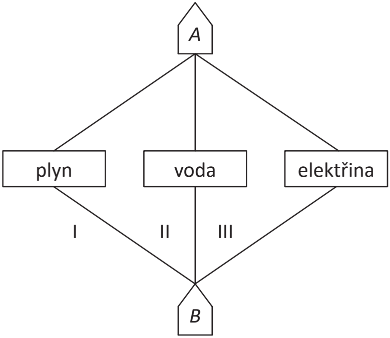
Zdroj: Solomon W. Golomb, American Mathematical Monthly 61, prosinec 1954, s. 678–679.

45 Důkaz provedeme úplně stejně jako u T-tetromin, jen musíme na začátku šachovnici obarvit jinak, než je obvyklé – místo úhlopříčných pruhů tentokrát tvoří políčka černé i políčka bílé barvy svislé pruhy. Při jakémkoli položení L-tetromina bude opět od jedné barvy zakryto jen jedno políčko, zatímco od té druhé tři. Proto je možné použít stejný argument jako v předešlé úloze.

57 Pokusme se řešení sestavit krok za krokem. Nejprve zaopatříme jeden dům plynem, vodou i elektřinou. Jak konkrétně jsou budovy uspořádány a jestli je vedení rovné nebo nějak zahnuté, nehraje roli.



Teď na obrázek přidáme druhý dům a jeho přípojky. Jakkoli je umístíme, vždy tím rozdělíme rovinu na tři oddělené části: Jednu vnější (I) a dvě vnitřní (II) a (III). Třetí dům musí samozřejmě stát v jedné z těchto částí. Pokud stojí v I, nelze k němu přivést vodu, pokud ve II nebo III, nelze ho připojit k elektrárně nebo k plynárně.



Úloha proto nemá řešení.

Zdroj: Úloha: Henry Ernest Dudeney, The Strand Magazine 46, 1913, s. 110. – Řešení: Henry Ernest Dudeney, Modern Puzzles and How to Solve Them, London 1926, s. 152–153. – V původním zdroji uvádí Dudeney na s. 221 trikové řešení, při němž jsou jen domy *A* a *B* napojeny na vodárnu přímo. Do domu *C* přitéká voda potrubím, které je napojeno na vodovod budovy *A*. Teprve ve své knize Modern Puzzles and How to Solve Them přinesl podrobné zdůvodnění, proč bez podobného triku úloha není řešitelná.

58 Číslice jsou uspořádány abecedně: čtyři, devět, dva, jedna, nula, osm, pět, sedm, šest, tři.

Bylo tedy použito pravidlo, podle kterého řadíme velmi často, i když většinou ne čísla.

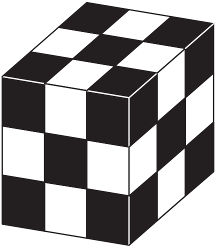
Zdroj: Martin Gardner, Mathematical Puzzles, New York 1961, s. 104, 109.

63 Tato pravděpodobnost je rovna jedné, protože ať už na povrchu koule rozmístíme tři body jakkoli, vždy budou ležet na některé vhodně zvolené polokouli. Teprve čtyři body už by se nemusely vejít do stejné polokoule.

Důkaz je jednoduchý: Dva body vždy určují *hlavní kružnici*, tedy kružnici, jejíž poloměr je shodný s poloměrem koule. Tato hlavní kružnice rozděluje kouli na dvě poloviny, přičemž oba body leží na okraji a příslušejí tedy oběma polokoulím. Třetí bod musí určitě skončit na jedné z polokoulí (nebo dokonce na obou, pokud náhodou také padne na stejnou hlavní kružnici). Proto všechny tři body určitě leží na stejné polokouli.

Zdroj: Úloha: Litton Industries (ed.), Aviation Week 17, č. 10, 2. září 1963. – Řešení: Litton Industries (ed.), Aviation Week 17, č. 11, 9. září 1963.

64 Když obarvíme krychli ve všech směrech jako šachovnici a rohy necháme černé, pak bude osm černých krychliček v rozích a šest uprostřed stěn, dohromady tedy čtrnáct; bílých krychliček proto bude jen třináct.

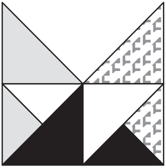


Když se červotoč prokousává krychlí podle uvedených pravidel, následuje vždy po černé krychličce bílá a naopak. Pokud tedy červotoč vykoná cestu procházející všemi sedmadvaceti krychličkami, musí první i poslední z nich být černá. Rohová krychlička skutečně černá je, to je v pořádku; středová krychlička je ale bílá, takže v ní červotoč určitě nemůže svou cestu zakončit.

Problém lze dále zobecňovat: Pokud má krychle hranu délky 3, 7, 11, 15, 19…, má rohová krychle jinou barvu než krychle středová, a úloha proto nemá řešení. Pro krychle, jejichž hrana se skládá z 5, 9, 13, 17… kostiček, má rohová krychlička stejnou barvu jako středová a dá se ukázat, že cesta z rohu do středu skutečně existuje.

Zdroj: Úloha: Martin Gardner, Scientific American 203, říjen 1960, s. 179–180. – Řešení: Martin Gardner, Scientific American 203, listopad 1960, s. 198.

76 Úlohu nejde vyřešit, pokud trváme na tom, že pozemek každého syna bude souvislý, tedy že se bude skládat jen z jednoho kusu. To po nás ale zadání nepožadovalo. Když si toto uvědomíme, je už úloha poměrně snadná:



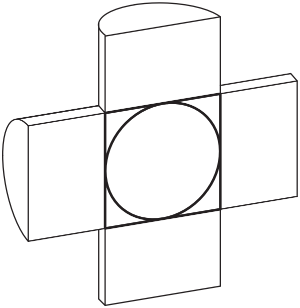
Zdroj: Louis Hoffmann (pravým jménem Angelo John Lewis), Puzzles Old and New, London 1893, s. 347, 386.

77 Ano, taková přímka vždy existuje. Pro názornost je na obrázku důkaz předveden jen pro čtyři body, ale argumenty fungují pro jakékoli množství bodů a nezávisle na průměru zadaného kruhu.

Nejprve pro každou dvojici bodů nakreslíme přímku, která jimi prochází. Takových přímek bude sice hodně, ale jen konečně mnoho. Je proto možné najít nějaký bod *A*, který leží mimo kružnici a neprochází jím žádná z přímek. Tímto bodem vedeme přímku, kterou postupně otáčíme

80 Při řešení se dá obejít bez derivování i integrování. Trik spočívá v tom, správně se na zkoumané těleso podívat.

Díváme-li se ve směru osy některého válce, pak má těleso v každém řezu tvar kruhu. Díváme-li se ve třetím směru, tedy kolmo na obě osy, pak těleso v každém řezu vypadá jako čtverec. Představme si nyní kouli, jejíž poloměr je stejný jako poloměr válců a která je vepsána do zkoumaného tělesa. Při pohledu kolmo na osy obou válců uvidíme v každém řezu tuto kouli jako kružnici vepsanou do čtverce, který představuje průřez tělesem.



Když všech nekonečně mnoho řezů znovu seskládáme dohromady, dostaneme původní těleso – podobně, jako když velmi tenké listy papíru dohromady vytvoří knihu. Z toho lze usoudit, že poměr hledaného objemu k objemu vepsané koule bude stejný jako poměr plochy čtverce k ploše vepsaného kruhu. Trojčlenka a známé vzorce nám pak už snadno dají řešení:

$$\frac{V_{\text{průřez}}}{V_{\text{koule}}} = \frac{S_{\text{čtverec}}}{S_{\text{kruh}}}$$

$$V_{\text{průřez}} = \frac{S_{\text{čtverec}}}{S_{\text{kruh}}} \times V_{\text{koule}}$$

$$V_{\text{průřez}} = \frac{(2r)^2}{\pi r^2} \times \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$V_{\text{průřez}} = \frac{16}{3} r^3$$

Zdroj: Úloha: Archimédes (cca 287–212), Die Methode, předmluva. – Řešení: Lieber, Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht 9, 1878, s. 202–203.

81 Metoda řešení je stejná jako v předchozí úloze, protože povrch celého tělesa lze poskládat z obvodů všech jeho řezů. Proto bude poměr hledaného povrchu k povrchu koule stejný jako poměr obvodu čtverce k obvodu vepsaného kruhu:

$$\frac{S_{\text{průřez}}}{S_{\text{koule}}} = \frac{o_{\text{čtverec}}}{o_{\text{kruh}}}$$

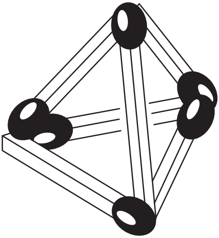
$$S_{\text{průřez}} = \frac{o_{\text{čtverec}}}{o_{\text{kruh}}} \times S_{\text{koule}}$$

$$S_{\text{průřez}} = \frac{4(2r)}{2\pi r} \times 4\pi r^2$$

$$S_{\text{průřez}} = 16r^2$$

Zdroj: Lieber, Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht 9, 1878, s. 202–203, 286–287.

93 V rovině není možné ze šesti zápalek složit čtyři shodné rovnoramenné trojúhelníky. Je potřeba využít trojrozměrnosti našeho světa. Řešením je pravidelný čtyřstěn.

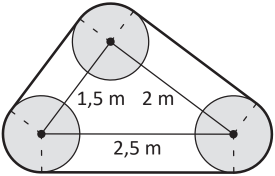


Zdroj: Louis Mittenzwey, Mathematische Kurzweil, Leipzig 1880, s. 32, 84.

94 Když dvě eura, která skončí u poslíčka, přičteme k 57 eurům, která na začátku patřila hostům, dostaneme součet, který nemá žádný reálný význam. Správný popis toho, co se stalo, zní: Trojice mužů je nakonec dohromady chudší o 57 eur, z nichž 55 bylo využito na zaplacení pokoje a dvě skončila v kapse nepoctivce.

Zdroj: Úloha: Eugene P. Northrop, Riddles in Mathematics, New York 1944, s. 8–9. – Řešení: Joseph Leeming, Fun with Puzzles, Philadelphia 1946, s. 152.

95 Úsečky spojující osy řemenic tvoří trojúhelník. Ty části řemene, které se nedotýkají žádné řemenice, a jsou tedy rovné, jsou rovnoběžné se stranami tohoto trojúhelníku a mají i stejné délky, tedy v součtu 6 metrů.



Obejdeme-li celý řemen, otočíme se přitom jednou kolem své osy. Tři kruhové oblouky, které tvoří zbytek řemenu, dávají proto dohromady jeden celý kruh. Jeho obvod má délku $2\pi \times 0{,}5$ m = π m, takže délka celého řemene je $6 + \pi$ m $\doteq 9{,}14$ m.

Zdroj: Harry Langman, Scripta Mathematica 15, březen 1949, s. 93. – Úloha se vyskytuje také v 8. vydání knihy Jakov Isidorovič Pereľman, Zábavná geometrie (Moskva 1951, kap. 9).